Transformada Rápida de Fourier

FFT

(*Fast Fourier Transform*)

Cap.I

A Transformada de Fourier é uma técnica matemática para obter a transformação de um conjunto de dados complexos de um domínio para um conjunto diferente de dados complexos num outro domínio.

Esta designação é devida em homenagem ao matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que em 1807 apresentou o seu trabalho sobre a propagação do calor em corpos sólidos e o uso de sinusoides para representar distribuições de temperatura, propondo, assim, que qualquer sinal periódico contínuo poderia ser representado como a soma das ondas de senos e cossenos com amplitudes, fases e períodos devidamente escolhidas.

A Transformada de Fourier é particularmente útil para decompor um sinal que consiste em múltiplas frequências. Esta representação, denominada espectro de frequência, é o processo mais frequente para representar as características de um sinal captado. Através do espectro de frequência podem ser avaliadas as diversas frequências constituintes do sinal e a amplitude de cada um destes componentes.

Uma imagem simples para a compreensão da Transformada de Fourier é imaginar uma quantidade de latas de tinta, cada uma com uma determinada cor e quantidades diferentes, e despejar o conteúdo de todas as latas noutro recipiente, misturando tudo muito bem até obter uma cor homogénea. A questão que se apresenta é se da nova tinta obtida com aquela mistura, é, no mínimo, possível identificar quais as cores que foram misturadas, e em que quantidades, e, numa segunda tarefa voltar à situação inicial, isto é, reverter o processo e obter da mistura as mesmas tintas originais, cada uma com a sua respectiva cor e exactamente com as respectivas quantidades. A tarefa revela-se muito complicada ou até impossível !

Na natureza, os sons que ouvimos são um pouco como essa mistura de tintas obtida. Cada som percepcionado é o resultado da soma final dos diversos sinais com frequências puras diferentes, ruídos, etc. Essa informação (esse som) é apresentada na forma mecânica ao sistema de audição, o qual faz o processo inverso, isto é, avalia, identifica e filtra cada uma das frequências presentes no momento (frequências entre 20 Hz e 20000Hz e com uma resolução de 3 Hz a 1000 Hz), convertendo-a em impulsos eléctricos e enviando-os de seguida ao cérebro onde serão interpretados.

A aplicação da Transformada de Fourier não se limita ao processamento digital de sinais, talvez a aplicação mais conhecida e discutida actualmente. A transformada de Fourier pode, de facto, acelerar o processo de treinamento de redes neurais, processamento de imagens (médicas, etc.), análise de dados, reconhecimento de formas, análise de música digital, compressão de ficheiros de imagem e de som, óptica, física e mecânica quântica, etc.

No entanto, a obtenção da função que caracteriza o sinal utilizando diretamente a Transformada de Fourier, torna-se, às vezes, muito difícil. Uma solução foi encontrada para se obter o espectro de frequência, denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT). Entretanto, o número de operações computacionais necessárias para o cálculo é ainda extremamente elevado, $O(N^2)$, onde N é o número de amostras do sinal necessárias para obter a transformação.

A solução para ultrapassar esta dificuldade foi a criação da Transformada Rápida de Fourier, considerada uma das grandes conquistas da ciência. Em 1965, J. W. Cooley e J. W. Tukey, publicaram um método que requeria cerca de $N*log_2N$ operações (ver mais abaixo a explicação desta expressão), desde que fosse escolhido uma quantidade apropriada de termos, o que possibilita a diminuição de número de cálculos de milhões para milhares.

Por meio da utilização da Transformada Rápida de Fourier, tornou-se possível diminuir o tempo de processamento em aplicações que variam desde resolução de equações diferenciais, equações integrais, problemas inversos até incluir problemas de teoria dos números.

O objectivo destes apontamentos visam , em particular, a transformação de uma função do domínio do tempo $x(t)$ para uma outra função do domínio da frequência $X(\omega)$, e demonstrar como se pode abordar o cálculo da Transformada Rápida de Fourier, entender e produzir um programa informático que analisa uma onda sonora, ela mesma composta pelo somatório de diversas ondas puras, ruídos, etc., e obter uma saída com as várias frequências que compõem essa onda no eixo dos X e as amplitudes no eixo dos Y.

O processo inverso, isto é, pegar nos dados obtidos pela Transformada Rápida de Fourier e voltar a dispor de um som igual ao inicial não só é possivel (depende do número de amostras definido), sendo até mais fácil que o primeiro, como também pode servir para testar todo o processamento, comparando dados iniciais com os obtidos na transformação, e, por exemplo, para proceder à limpesa de frequências indesejadas (ruídos, etc), eliminar, alterar, melhorar parâmetros, etc., do som em estudo.

Cap.II

Considerações prévias à abordagem da Transformada Rápida de Fourier.

Onda

Os sons, a luz, os sinais de rádio e todos os fenómenos de movimentos ondulatórios são a resultante de uma perturbação oscilante da matéria que se propaga no espaço ou em qualquer meio de propagação (sólido, líquido ou gasoso), e periodicamente no tempo, carregando com ela energia e informação, e a uma determinada velocidade.
As ondas, quanto à sua natureza, podem ser ondas mecânicas (propagam-se em meios materiais) e ondas electromagnéticas que resultam da oscilação dos campos magnéticos e eléctricos, (propagam-se sem ser necessário um meio físico).

As características principais de uma onda são a amplitude, o comprimento e o período. (Fig.1)

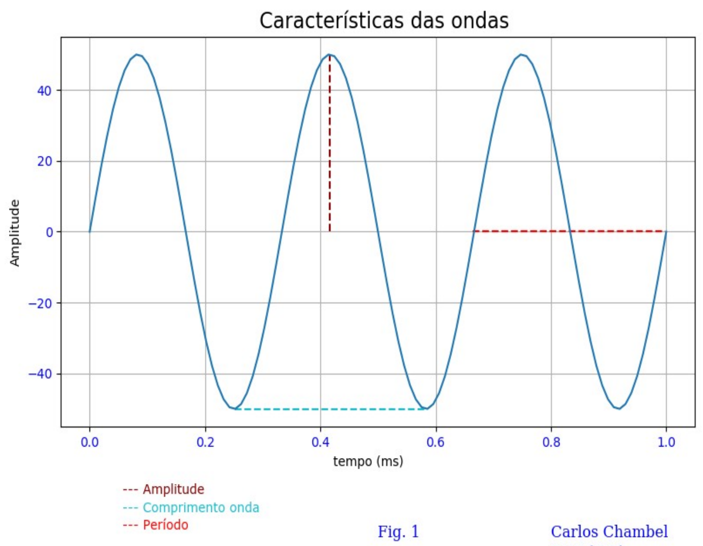


Fig. 1

Carlos Chambel
20221204

Amplitude (γ)

distância do nível máximo de uma crista ou vale da onda até ao ponto de equilíbrio.

Comprimento da onda (λ)

distância entre dois pontos iguais da onda, por exemplo de uma crista à crista seguinte do mesmo sinal - (medida em metros).

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{1}$$

Período (T)

intervalo de tempo que ocorra para um comprimento de onda completo $\frac{segundos}{ciclo}$ - (medido em segundos/ciclo)

$$T = \frac{1}{f} \tag{2}$$

Frequência (f)

Número de oscilações (ciclos completos) da onda por unidade de tempo. $\frac{ciclos}{segundo}$ (medida em ciclos/segundo (Hertz (Hz)) .

Não depende do meio de propagação.

$$f = \frac{1}{\mathrm{T}} \tag{3}$$

Número de onda (k)

número de comprimentos de onda por unidade de distância

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{4}$$

Frequência angular ou velocidade angular (**ω**) (medida em radianos por segundo)

Rapidez com a qual o deslocamento (radianos) de um ponto num círculo ocorre por segundo. A variação do angulo $\Delta\theta$ formado pelo raio do início do movimento e pelo raio correspondente ao ponto final do movimento corresponde a um movimento linear ΔS, cuja velocidade linear é $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (5)$$

Relação da frequência angular com a frequência linear:

$$f = \frac{1}{T} \quad => \quad \omega = 2\pi f \qquad (6)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{f} \quad => \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (7)$$

No caso das ondas electromagnéticas, onde c é a velocidade da luz :

$$c = \lambda * f \qquad (8)$$

Donde se conclui que, nas ondas electromagnéticas, a frequência é inversamente proporcional ao comprimento de onda.

Fase do sinal ou ângulo de fase (θ)

caracteristica de um sinal que indica o seu posicionamento no eixo do tempo (medida em radianos). Quando (θ) <> 0 a forma da onda desloca-se no tempo em (θ)/(**ω**) segundos

Velocidade linear (υ)

Espaço percorrido pela onda num determinado intervalo de tempo. (medida em m/s)

Depende do meio e da atemperatura desse meio em que se propaga.

$$\upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{9}$$

Relação da velocidade angular com a velocidade linear:

Considerando que $\Delta S = 2\pi R$, em que R é o raio da trajectória circular e que T é o tempo gasto para completar um círculo e $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$\upsilon = \frac{2\,\pi R}{T} \tag{10}$$

$$\upsilon = \omega R \tag{11}$$

Ondas senoidais

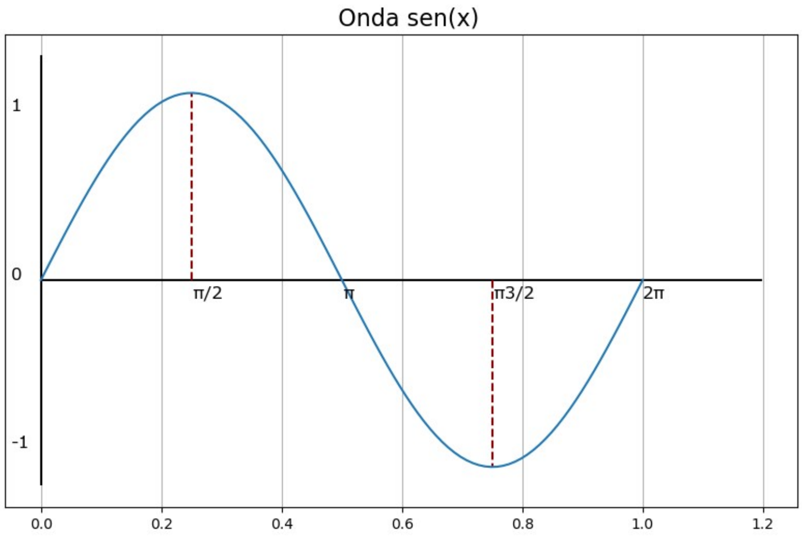


Fig. 2 Carlos Chambel 20221206

A onda senoidal é a forma mais simples de uma onda. É uma curva matemática que descreve uma oscilação periódica (repete-se a cada período de 2π) resultante da propagação de pulsos iguais em intervalos de tempo iguais, com uma perturbação que varia tanto com o tempo (t) quanto com a distância (x) .

Função básica em função do tempo (t) :

$$y(x,t) = \gamma \sin(kx + \omega t + \phi) + D \tag{12}$$

γ = amplitude da onda

k = número de onda

ω = frequência angular (rad/seg)

ϕ = ângulo de fase (rad)

T = tempo

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \qquad f_0 = \text{frequência (Hz)} \tag{13}$$

sinal sinoidal periódico com período fundamental:

$$T_0 = 2\frac{\pi}{\omega_0} \tag{14}$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

D = Deslocamento vertical da onda

Onda sonora

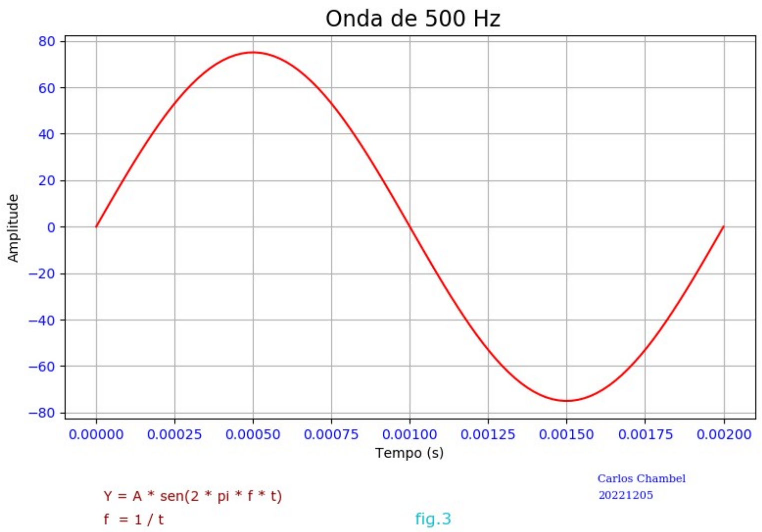


fig.3

As ondas sonoras são ondas mecânicas que resultam de uma vibração periódica de uma fonte sonora, que se transmite a um meio de propagação sólido, líquido ou gasoso (o som não se papaga no vazio).

São longitudinais porque a direcção da propagação é a mesma da direcção da vibração e são tridimensionais porque se propagam em todas as direcções.

O espectro sonoro abrange as frequências do zero Hz (silêncio) aos 10^9 Hz. Nos seres humanos, os sons audíveis estão na faixa desse espectro, dos 20Hz aos 20.000Hz, com uma resolução de 3 Hz a 10^3 Hz.

Propriedades da onda sonora

duração

É o intervalo de tempo de uma vibração, e compreende quatro fases:

a. Ataque: Fase inicial desde o início do som até atingir o seu nível máximo;
b. Decaimento: Fase em que se verifica um ligeiro decaimento do som, até ao momento em que estabiliza;
c. Sustentação: tempo de duração estável do som;
d. Repouso: Fase final em que o som começa a perder intensidade até atingir o silêncio.

É o tempo de produção do som ser mais longo ou mais curto. Caracteriza o ritmo.

intensidade

É o volume de som, que dá a sensação de forte e fraco.

Um som com maior amplitude é um som forte, enquanto um som com amplitude pequena é um som fraco.

A unidade de medida do nível sonoro é o bel, utilizando-se o submúltiplo decibel (dB). Qanto maior a amplitude da onda sonora, maior será sua intensidade.

altura

É o que nos faz perceber se um som é grave ou agudo (grosso ou fino).

Quanto maior a frequência, mais agudo é o som; e quanto menor for a frequência, mais grave é o som.

A altura do som diz respeito à sua frequência. (Som alto = som agudo = alta frequência)

timbre

É a caracteristica que permite distinguir dois sons da mesma altura e com a mesma intensidade, mas que foram produzidos por fontes diferentes.

A intensidade e duração são as mesmas mas o timbre pode ser diferente.

Propriedade do som que define o instrumento.

Cap.III

Conceitos básicos

Número de Euler

$$e$$

Taxa básica de crescimento em todos os processos em crescimento contínuo, é uma constante irracional igual a 2,71828182845... e pode ser calculado como a soma da série infinita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{15}$$

O número e também é chamado por número de Neper e é a base do logaritmo natural $\ln(x)$.

Função exponencial

Função em que a variável funciona como expoente

$$y = a^x \tag{16}$$

$$a \in \Re$$

$$a > 0, \ a \neq 1$$

Função exponencial natural

É a função exponencial cuja base é o número de Euler. Pode ser definida, por exemplo, por:

$$y = e^x \tag{17}$$

$$x \in C$$

Função logarítmica

É a função inversa da função exponencial.

$$y = \log_a x \quad <=> \quad a^y = x \qquad (18)$$

$$a \in \Re \ , \ a > 0 \ , \ a \neq 1$$

O logaritmo de x é o expoente ao qual se deve elevar a base a para se obter o número x.

Função periódica

Uma função f(x) é uma função periódica de período T se:

$f : R \to R$

$$f(x) + T = f(x)$$

Sendo o menor valor de T chamado de período mínimo de f(x)

Números complexos

Toda a expressão na forma algébrica:

$$z = a + bi \qquad (19)$$

$$a, b \in \Re$$

em que a e b são números reais.

i é a unidade imaginária definida por:

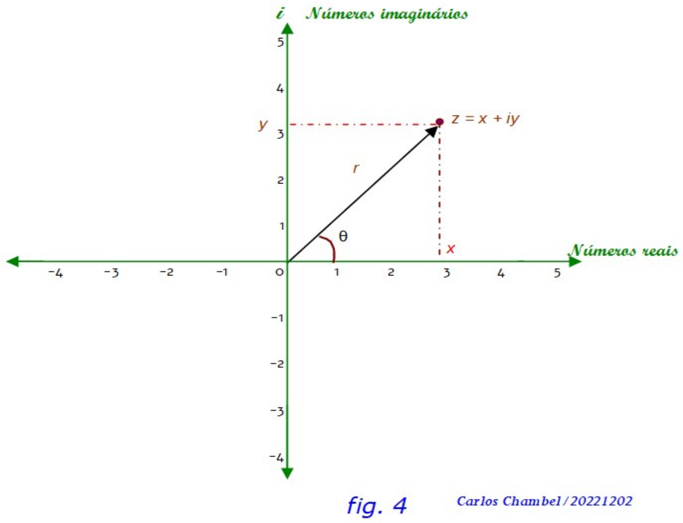
$$i = \sqrt{-1} \quad \textbf{ou} \quad i^2 = -1 \tag{20}$$

a é a parte real do número complexo

bi é a parte imaginária do número complexo

Todo o número complexo $a + bi$ pode ser representado geometricamente sobre o plano Oxy por um ponto P(a,b) de coordenadas a e b.

Na representação dos números complexos sobre o plano complexo, o eixo Oy chama-se eixo imaginário e o eixo Ox o eixo real.



Plano complexo ou plano de Argand-Gauss

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(magnetitude)} \tag{21}$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} \tag{22}$$

$$\theta = Arctg\,\frac{y}{x} \tag{23}$$

Plano complexo é o plano onde os números i complexos são representados com o eixo dos reais no eixo dos x e o eixo imaginário no eixo dos y .

Multiplicando por i o ponto gira 90º no sentido anti-horário

Função exponencial de expoente complexo

Se: $z = x + iy$

e $x , y \in \Re$

então z é uma variável complexa

$$e^{x + iy} = e^{x}(cosy + i.seny) \tag{24}$$

Identidades importantes:

$$e^{\pm ik2\pi} = 1$$

$$e^{\pm i\pi} = -1$$

$$e^{\pm ik\pi} = (-1)^{k}$$

$$i = e^{i\pi / 2}$$

$$-i = e^{-i\pi / 2}$$

$$-i = \frac{1}{i}$$

Fórmula de Euler

A fórmula de Euler exprime a ligação entre a função exponencial de expoente imaginário e as funções trignométricas

Aplicando $x = 0$ na fórmula (24), tem-se:

$$e^{iy} = cosy + i.seny \qquad (25)$$

E $y = -y$:

$$e^{-iy} = cosy - i.seny \qquad (26)$$

Identidade de Euler

De (25), substituindo y por π, resulta a identidade de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad (27)$$

A identidade de Euler é considerada a mais bela fórmula da matemática porque ela em si mesma contém:

1 - equação porque tem o sinal "="

2 - inclui os cinco principais números centrais em toda a matemática:

0 = Zero

1 = Número um

$\pi = Pi$ Constante de Arquimedes (Razão entre circunferência e diâmetro de um círculo)

i = Unidade imaginária

e = Número de Euler (ou número de Neper), base do logaritmo natural

Plano variável complexa e plano trignométrico

As funções trigonométricas também podem ser definidas a partir de funções exponenciais complexas

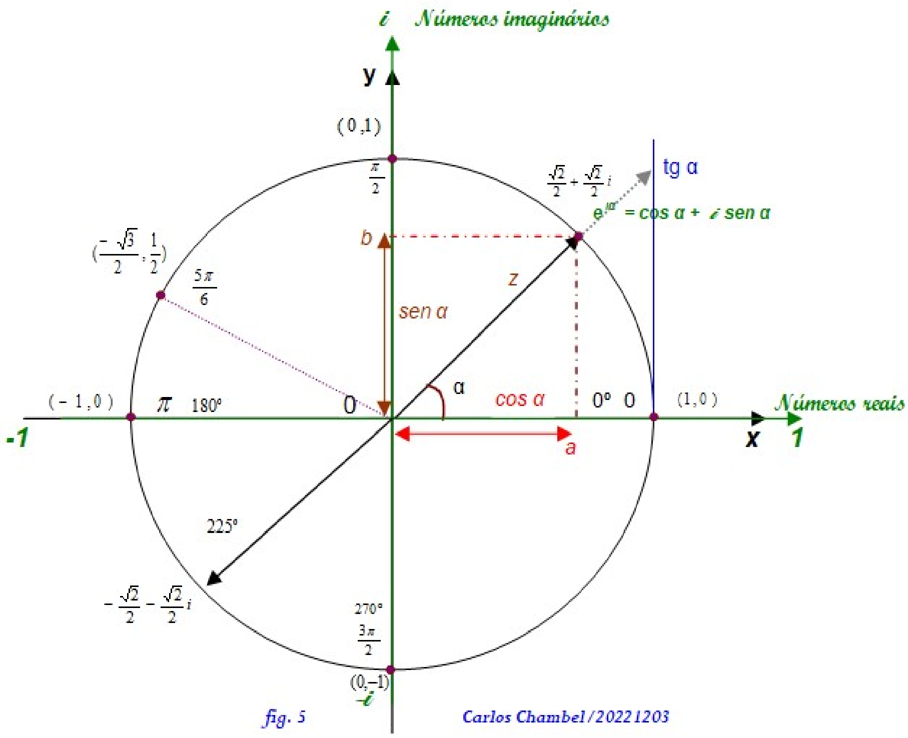


fig. 5

$$(x,0) = x$$

$$(0,1) = i$$

Todo o número complexo pode ser posto na seguinte forma:

$$a = z\cos\alpha$$

$$b = zsen\alpha$$

e,

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = Arctg(\frac{b}{a})$$

$$a + bi = z(\cos\alpha + i.sen\,\alpha) \qquad (28)$$

Sendo:

$$z(\cos\alpha + i.sen\alpha) \qquad (29)$$

a forma trignométrica do número complexo a+bi

Da fórmula (25), tem-se a definição complexa de seno e cosseno :

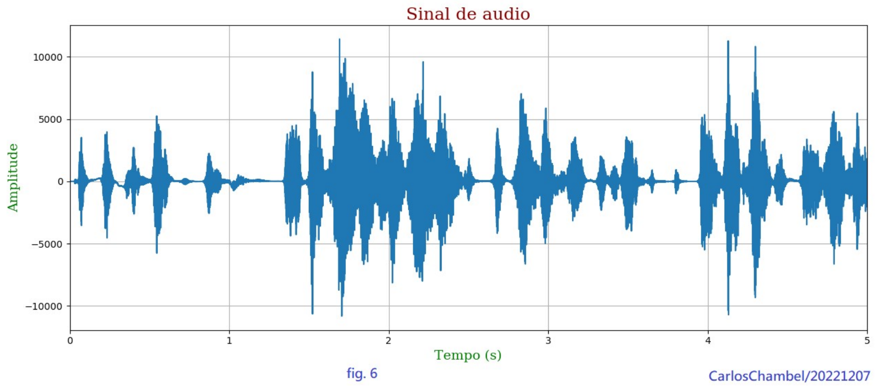
$$sen\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \qquad (30)$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad (31)$$

Cap. IV
Sinais

É um conjunto de dados ou informação que descreve a evolução de uma grandeza referente a um fenómeno que varia em função de uma (ou mais) váriavel independente inteira (tempo, espaço, etc.)

Podem ser apresentados através de expressões matemáticas, de gráficos, de bits, etc.
Exemplos: batimento cardiaco, fala, imagem, corrente eléctrica, etc.
O sinal mais puro é o que se pode obter por um senoidal



Obtido de um ficheiro de audio.wav, num intervalo de 5 segundos

Number of channels	: 1
Sample width	: 2
frame rate	: 16000
Number of frames	: 80000

O domínio do tempo revela como a amplitude do sinal varia no tempo, e o domínio da frequência mostra quantas vezes a variação da amplitude em relação à frequência.

Matematicamente, o sinal é representado como uma função de variável independente (por exemplo, tempo) *t*:

$$x(t)$$

Os sinais podem ser classificados segundo diversos critérios. Considere-se, por exemplo, sinal contínuo ou discreto, e periódico ou aperiódico, dando assim:

- sinal aperiódico contínuo $x(t)$

  Sinais que se estendem ao infinto positivo e negativo sem se repetir num padrão periódico
- sinal periódico contínuo $x(t)$

  Sinais que se repetem com um padrão regular de infinito negativo a positivo
- sinal aperiódico discreto $x[t]$

  Sinais que se definem apenas em pontos discretos infinto negativo a positivo e não se repetem num padrão periódico
- sinal periódico discreto $x[t]$

  Sinais discretos que se repetem de forma periódica do infinito negativo a positivo

Sinal periódico

Sinal que se repete em cada intervalo de tempo T (período de tempo do sinal).

- sinais periódicos em tempo contínuo
- sinais periódicos em tempo discreto.

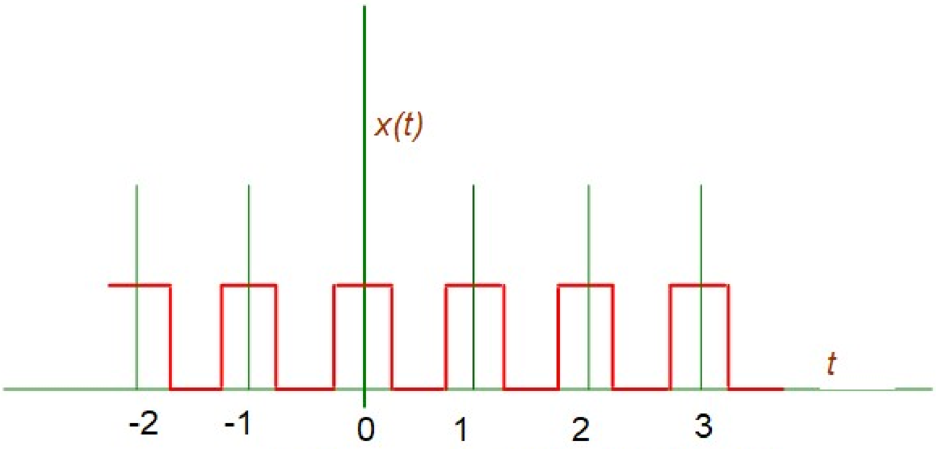


fig. 7 Carlos Chambel/20221202

Condição:

$$x(t) = x(t \pm kT)\ ,\ \forall t\ ,\quad k \in Z$$

T = período do tempo = nT_0

n = {1, 2, 3, ..., n}

T_0 = período fundamental, é o menor intervalo de tempo T para o qual o sinal dado é periódico.

Frequência fundamental de $x(t)$:

$$f = \frac{1}{T_0} \quad \text{Hertz}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{radianos/segundo}$$

$x(t) = e^{i\omega_0 t}$ e existe um valor de T, tal que:

$$e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 (t+T)} \tag{32}$$

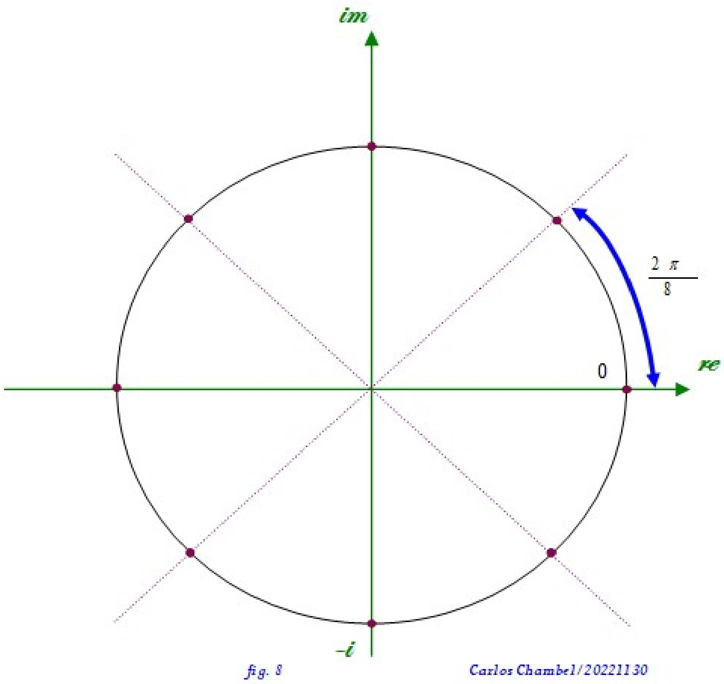
Sendo

$$x(t) = e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i.\sin(\omega_0 t), \quad (33)$$

a parte real do sinal = $cos(\omega_0 t)$

e a parte imaginária do sinal = $i.sen(\omega_0 t)$

Pontos no círculo unitário para um sinal periódico com uma amostragem de de 8 amostras com um espaçamento de frequência de 2π/N.:



Sinal aperiódico

Sinal cujos componentes da frequência variam no tempo.
É o caso da maioria dos sinais de áudio, como música e fala.

- sinais aperiódicos contínuo
- sinais aperiódicos discreto.

Sinal contínuo

Sinal em tempo contínuo é um sinal definido em função de um conjunto de valores da variável independente contínua no tempo t, e na amplitude.

As amostras de um sinal contínuo, tomadas regularmente a um intervalo de tempo T adequado, são suficientes para apresentar toda a informação do sinal original.

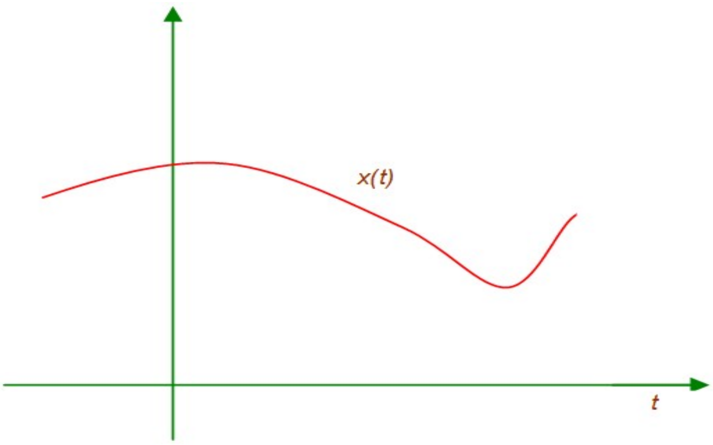


fig. 9 Carlos Chambel/20221202

é definido para todo tempo t, sendo t uma variável independente contínua

$$x(t) \quad , \quad t \in \Re$$

Sinal discreto

Sinal em tempo discreto *x[n]* é um sinal definido em função apenas de um conjunto de valores da variável independente discreta n.

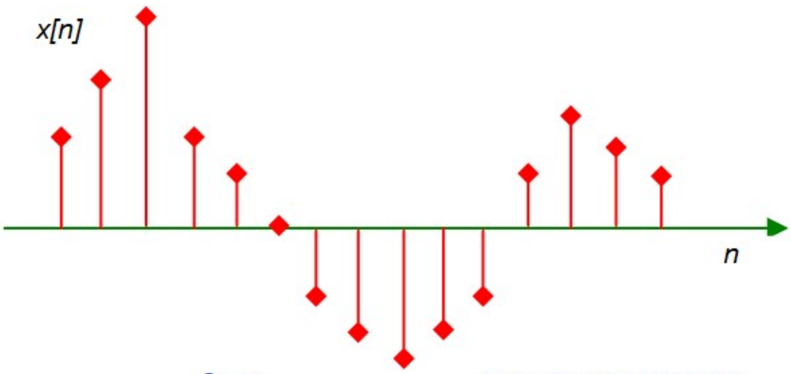


fig. 10 *Carlos Chambel / 20221202*

$$x[n] \quad n \in Z$$

ω frequência angular para sinais discretos (radianos) :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{34}$$

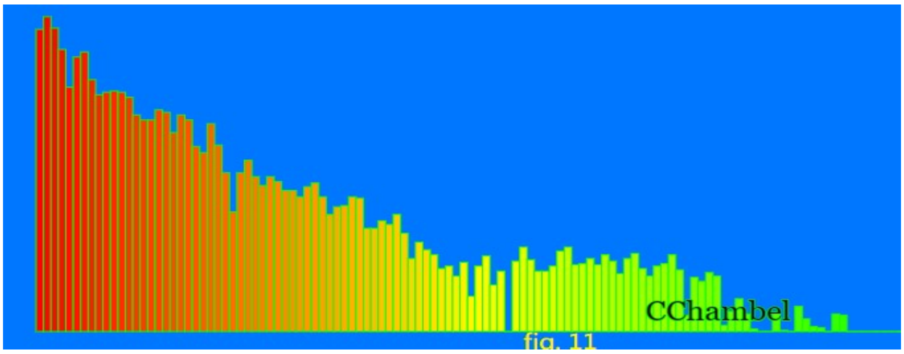
$$x[n] = a \sin(\omega_0 n T_s) \tag{35}$$

$$x[n] = a \sin(2\pi . n \frac{f_0}{f_s}) \tag{36}$$

Só os sinais discretos podem processados em computadores digitais.

Sinal digital

Sinais digitais são, basicamente , uma sequência finita de pontos discretos, que depende da taxa de amostragem.



Frequências e respectivas amplitudes de um sinal obtido pelo microfone do computador

Partes par e ímpar de um sinal

sinal contínuo:

Uma função f é par se $f(t) = f(-t), \forall t$

Uma função f é ímpar se $f(t) = -f(-t), \forall t$

sinal de tempo discreto:

Uma função f é par se $f[n] = f[-n], \forall n$

Uma função f é ímpar se $f[n] = -f[-n], \forall n$

Qualquer sinal pode ser decomposto numa soma das suas componentes par e ímpar:

Considere-se $x(t) = x_e(t) + x_0(t)$ (37)

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_0(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Teorema da amostragem

Um sinal x(t) de largura de banda H é completamente determinado pelos valores das suas amostras x(nT), e $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$, se a frequência de amostragem ω_s for superior à frequência de Nyquist: $\omega_s \geq 2H$.

A frequência de amostragem deve ser, no mínimo, igual ao dobro da frequência máxima existente no sinal amostrado, por forma a garantir a sua reconstrução.

Amostragem de sinais

T_s

A amostragem de sinais é uma representação digital de um sinal analógico.

A qualidade da amostra é determinada pela taxa de amostragem na qual o sinal é amostrado e deve garantir a possibilidade de reconstrução exacta desse sinal.

Uma amostra é um valor num ponto do tempo.

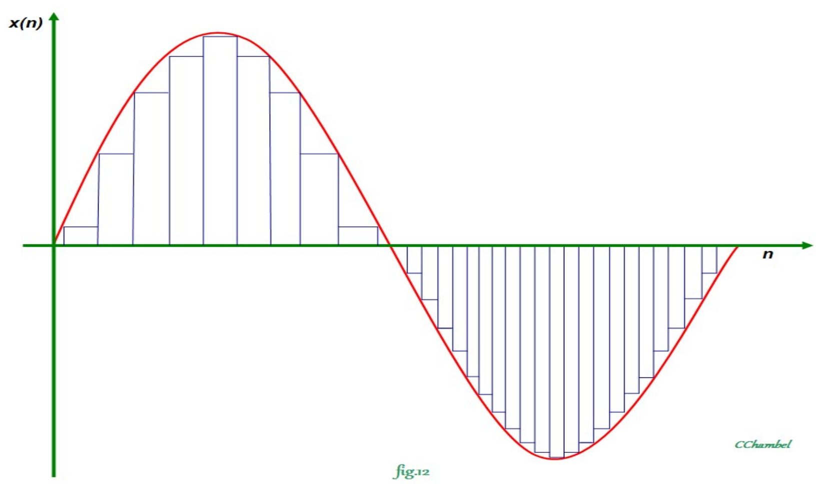


Fig.12

(uma amostra em cada T_S segundos)

$y(n) = x(nT)$

Taxa/frequência de amostragem
(Sampling rate)

$$f_S = \frac{1}{T_S} \text{ Hz} \tag{38}$$

Taxa ou frequência de amostragem é a quantidade de amostras de um sinal por unidade de tempo de um sinal.
Quanto maior a taxa de amostragem maior é a resolução do sinal digital obtido (mais detalhes obtidos) .

O número de amostras no domínio do tempo é geralmente representado pela variável N (inteiro positivo) e deve ser uma potência de dois. Para calcular a Transformada Rápida de Fourier, utiliza-se geralmente o $N = [0,1.2,\dots,N-1]$ entre 32 e 4096.

O número de amostras N deve ser igual à razão entre a taxa de amostragem e o valor da resolução de frequência pretendida, com o arredondamento para o próximo número potência de dois.

$$N = \frac{f_S}{R} \tag{39}$$

R = frequência desejada, isto é:

$$R = N.f_S$$

Para evitar a perda de qualidade na reprodução, deve ser sempre observado o teorema de Nyquist.

A taxa de amostragem padrão para análise dos sons audíveis é de 44100 Hz, isto porque o ouvido humano só é capaz de perceber frequências de 20 Hz até 20kHz. No nosso caso, a frequência máxima é de 20.000 Hz.)

Entretanto, como as amostras estimam o sinal analógico, a representação digital nunca é tão precisa quanto os dados analógicos.

Exemplo:

matriz com N = 512 amostras referentes ao sinal da fig. 18, cada uma com uma parte real e uma parte complexa:

[-9.49819053e-14+0.00000000e+00j -6.55192391e-13-7.68000000e+02j
-3.63084153e-13-2.52012175e-13j -3.15026088e-13+4.26172802e-13j
-1.57326335e-12-2.56000000e+02j -9.83884065e-14-1.96157875e-12j
1.34752750e-12-8.42986627e-14j -5.79818452e-13-1.66400000e+03j
3.85914038e-14-8.70201308e-13j 2.62771909e-13-2.10940008e-13j
-1.60112190e-13-3.87774019e-13j 2.04270482e-13-5.14278860e-13j
1.24554192e-13-2.87960690e-13j 1.62888840e-14-4.36842539e-13j
1.44712757e-13-3.22482530e-13j -4.58259772e-14-4.21939795e-13j
9.88364269e-14-1.05291558e-12j 3.27233258e-12-2.17600000e+03j
-2.34765065e-14+8.29757243e-13j 1.54318908e-15+6.98649335e-13j
-1.69105533e-14+2.46152052e-13j 1.50742665e-13+1.10569124e-13j
... ...
... ...
-2.13577866e-14-2.27878944e-13j -4.14427768e-15-5.13807186e-13j
-2.34765065e-14-8.28716413e-13j 1.04910077e-12+2.17600000e+03j
9.88364269e-14+1.05291558e-12j -1.82467487e-13+1.03272838e-13j

1.44712757e-13+3.24260645e-13j 4.43909893e-14+2.90968920e-13j

1.23924463e-13+2.96890144e-13j 1.84647245e-13+5.05981414e-13j

-1.60112190e-13+3.91579676e-13j 2.70960432e-13-4.96321189e-14j

3.85914038e-14+8.70201308e-13j -2.79037331e-12+1.66400000e+03j

1.34752750e-12+1.00269583e-13j -7.66723934e-14+1.76733643e-12j

-1.80091164e-12+2.56000000e+02j -3.61627334e-13-6.47045632e-13j

-3.63084153e-13+2.25404663e-13j -1.58790096e-12+7.68000000e+02j]

Período de amostragem de sinais

$$P$$

O período de amostragem P é o intervalo de tempo em que é tomada uma amostra.

Teorema de Nyquist

(ou frequência de Nyquist)

A frequência de amostragem deve ser igual pelo menos ao dobro da frequência mais alta contida no sinal analógico original.

$$fNyquist = \frac{H}{2} \tag{40}$$

Sendo:

$fNyquist$ = frequência de Nyquist

H = taxa de amostragem

Para evitar qualquer perda de informação e ser possível reconstruir totalmente o sinal, é necessário que o sinal seja amostrado em períodos equidistantes e com uma taxa de amostragem de pelo menos o dobro da frequência mais alta do sinal analógico original.

Cap.V

Teoremas de Fourier

Considerando os quatro tipos de sinais básicos anteriormente referidos a análise de Fourier pode ser:

- Transformada de Fourier (FT)

  sinal aperiódico e contínuo $x(t)$
- Série de Fourier (FS)

  sinal periódico e contínuo $x(t)$
- Transformada Discreta de Fourier (DFT)

  Sinal periódico e discreto $x[t]$
- Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

  sinal aperiódico e de tempo discreto $x[n]$

Para o processamento dos sinais num computador os sinais devem estar na forma digital e ter duração finita.

Série de Fourier

A série de Fourier é uma série infinita que expressa uma função periódica e que pode ser representada como a soma de funções trignométricas simples.

A série trigonométrica de Fourier, convergente, é usada para representar funções infinitas e periódicas, na forma de funções simples de senos e cossenos.

Se f(x) for periodica e com período de 2π, pode ser escrita como uma infinita soma de senos e cosenos, variando a frequência.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.sen(nx) \tag{41}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{42}$$

Sendo os termos a_n e b_n denominados coeficientes de Fourier de f(x) dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos(nx)dx \tag{43}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).sen(nx)dx \tag{44}$$

$$[n = 1,2,3,...]$$

Na forma complexa, com coeficientes complexos, e usando a formula de Euler:

$$e^{ikx} = cos(kx) + i.sen(kx)$$

$$c_k = \alpha_k + i\beta_k$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k).[\cos(kx) + isen(kx)] \tag{45}$$

A série de Fourier correspondente a uma função absolutamente integrável f(x), de período T, pode sempre integrar-se em qualquer intervalo, termo a termo, sendo a soma da série que se obtém o integral de f(x). Se os limites do integral forem variáveis, a série que resulta da integração é uniformemente convergente

$f : R \to R$ periódica de período T se $f(x + T) = f(x), \forall x \in R)$

Se o sinal periódico contínuo $x(t) \in C$, a série exponencial de Fourier pode ser expressa:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k . e^{i\omega_0 .k.t} \tag{46}$$

Com:

ω_0 = frequência fundamental do sinal x(t)

$= \frac{2\pi}{T}$

T = período fundamental do sinal x(t)

$c_k = \frac{1}{T} \int x(t).e^{-i\omega_0 .k.t} .dt$ (coeficiente espectral)

Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é uma transformada integral que expressa uma função em termos de funções de base sinusoidal. Existem diversas variações desta transformada, dependendo do tipo de função a transformar. Em particular, é uma técnica matemática com imensas aplicações em física e engenharia para obter a transformação de uma função do domínio do tempo $x(t)$ para uma outra função do domínio da frequência $X(\omega)$ onde se apresentam as frequências resultantes e respectivas fases e amplitudes. O espectro do sinal é também o resultado da transformada de Fourier, no domínio das freequências.

Se $f : R \to C$, a sua transformada de Fourier $F : R \to C$ é dada pela expressão:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-i\omega t} dt \tag{47}$$

$\omega \in (-\infty, \infty)$

O domínio da transformada de Fourier é o conjunto de números reais ω

E a sua inversa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega).e^{i\omega t} d\omega \tag{48}$$

Considerar que a convergência da Transforma de Fourier exige que:

1- seja absolutamente integrável ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$)

2- ter um úmero finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito

3- em qualquer intervalo finito as descontinuidades devem devem ser finitas (*ou seja*, |x(*α*+)-*x*(*α*-)| <∞)

Transformada Discreta de Fourier

DFT

A Transformada Discreta de Fourier, ou simplesmente DFT, é uma técnica matemática que transforma uma função contínua no domínio do tempo *x(t)* em uma função contínua no domínio da frequência *X(f)*.

DFT, como o nome sugere, é verdadeiramente discreto, isto é, conjuntos de dados de domínio de tempo discreto são transformados em representação de frequência discreta. Em termos simples, estabelece uma relação entre a representação no domínio do tempo e a representação no domínio da frequência.

A *transformada discreta de Fourier* é extremamente útil para decompor um sinal discreto nas suas multiplas frequências puras. É uma das técnicas mais utilizadas no processamento digital de sinais, permitindo analizar e manipular os sinais que de outra forma não seria possivel.

A *transformada discreta de Fourier* é equivalente à transformada de Fourier, mas aplicada a sinais de tempo discretos e a principal diferença é que o espectro obtido é composto pelo mesmo número de frequências discretas que o número de amostras do sinal ao qual foi aplicada a transformada (DFT).

Transforma uma sequência de números complexos *N* em outra sequência de números complexos, que é definido por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{\frac{-i2\pi}{N}.kn} \tag{49}$$

$$\forall k \in N$$

Considera-se que o sinal "=" significa: "é igual por definição a"

e:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = x(0) + x(1) + \ldots + x(N-1)$$

e considerando a formula de Euler:

$$e^{-2\pi ift} = cos(2\pi ift) - i.sen(2\pi ift)$$

Temos a equação (49) com os componentes reais e imaginários:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).\left[(\cos\frac{2\pi}{N}.kn) - i.sen(\frac{2\pi}{N}.kn)\right] \qquad (50)$$

$X(k)$ = números complexos resultantes da DFT, onde se inclue a informação de amplitude e fase.

x(n) = Números complexos do valor do sinal no momento da amostra n das N amostras de entrada consecutivas de um sinal.

k = frequência actual que se está a considerar, em que $k \in [0,1.2,\ldots,N-1]$ Hertz. Índice da saída no domínio da frequência.

N = número de amostras de entrada x(n) e número de pontos de frequência na saída DFT

n = n-ésima amostra actual (índice no somínio do tempo das amostras de entrada) = $n = [0,1.2,\ldots,N-1]$

1/N: utilizado para a transformação inversa (partindo do domínio das frequências para o domínio do tempo)

$2\pi n$ é a velocidade em rad/seg

Amplitude:

$$amp = \frac{|X_k|}{N} = \frac{\sqrt{\mathrm{Re}(Xk)^2 + \mathrm{Im}(X_k)^2}}{N} \tag{51}$$

Fase:

$$fase = Arc\tan(\frac{\mathrm{Im}(X_k)}{\mathrm{Re}(X_k)}) \tag{52}$$

Sendo a inversa da *transformada discreta de Fourier* dada por:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(k).e^{\frac{i2\pi nm}{N}} \tag{53}$$

$$\forall n \in N$$

f e F são duas representações da mesma função, utilizando como operador a transformada de Fourier, podendo ser escritas como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-i\omega.t}dt \tag{54}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega).e^{i\omega.t}d\omega \tag{55}$$

Da equação (54), e pela formula de Euler:

$$e^{-i\omega t} = cos(\omega.t) - i.sen(\omega.t)$$

E substituindo na formula acima:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[cos(\omega t) - i.sen(\omega.t)\right]dt \qquad (56)$$

Distribuindo o f(t) em dois integrais:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos(\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t).sen(\omega.t)dt \qquad (57)$$

Onde o primeiro integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).cos(\omega t).dt \qquad (58)$$

representa o componente real da função

e o segundo integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).sen(\omega t).dt \qquad (59)$$

o componente imaginário (número complexo) dessa função

e a magnitude é a magnitude da transformada de Fourier relativa a ω.

e ω é a frequência angular, em radianos por segundo, sendo:

$\omega = 2\pi.f$ onde f é a frequência em ciclos por segundo (hertz)

e a frequência fundamental:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

e a k frequência harmónica:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T}$$

O cálculo da Transformada Discreta de Fourier DFT em computador necessita de N^2 produtos entre números complexos e N(N-1) de somas, resultando numa complexidade de $O(N^2)$ operações.

Por exemplo, se tratarmos de uma amostra com N = 1024, serão processadas 1.048.576 operações.

Transformada Rápida de Fourier FFT

A transformada rápida de Fourier (FFT) é um algoritmo computacional que permite a implementação prática, mais rápida e eficiente da transformada discreta de Fourier (DFT).

Existem inúmeras variantes do algoritmo com o objectivo de alcançar o maior desempenho em função do resultado que se pretende.

Por esta via, o algoritmo divide o índice de matriz de entrada de comprimento N em duas submatrizes de comprimento N/2, uma contendo as amostras indexadas pares e outra contendo as amostras indexadas ímpares, aplicando sucessivamente o mesmo processo de divisão, conforme fig. 14.

O conjunto de dados discretos no domínio do tempo são transformados em representação de frequência discreta.

O grande benefício da transformada rápida de Fourier-FFT é que para o tratamento de dados em que o N é muito elevado a redução do tempo de computação é muito significativo, esse número de operações cai para O($N \log_2 N$) operações:

Exemplo para N = 512:

DFT: N^2 = 262.144 operações

FFT: $N \log_2 N$ = 4608 operações

Número de operações aproximado da DFT <-> FFT

N	n^2 (DFT)	$N*\log_2(N)$ (FFT)	Razão DFT/FFT
16	256	64	4x
512	262144	4608	56x
2048	4194304	22528	186x

Fig. 13

É um método particularmente eficiente de calcular uma DFT, não introduzindo nenhum erro adicional.

A taxa de amostragem de dados deve satisfazer o *Teorema de Nyquist* .

O algoritmo FFT mais comumente usado é o algoritmo Cooley-Tukey

algoritmo Cooley-Tukey - DIT

O processo a seguir aplicado para altrapassar a complexidade computacional da transformada discreta de Fourier baseia-se no algoritmo Cooley-Tukey. e Radix-2 DIT (decimation-in-Time) na base 2, sendo este um dos muitos algoritmos existentes e que são conhecidos como Transformada Rápida de Fourier (FFT). Este algoritmo não é uma transformada, mas sim um processo que realiza a transformada discreta de Fourier com a mesma garantia de resultados de uma DFT e com todas as vantagens da FFT.

Segundo o mesmo, podemos dividir a DFT em somas de somas sucessivas, desde que o número de amostras do sinal N seja uma potência de 2, decompondo o sinal em N amostras únicas e depois calcular as frequências e respectivas amplitudes que existem no sinal.

Se não for possivel, à partida, garantir a que N tenha o valor de uma potência de dois, acrescentam-se amostras de valor zero ao final da sequência dos valores de tempo até satisfazer essa condição.

Da equação da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{\frac{-i2\pi}{N}.kn}$$

Onde:

X[k] = sequência de amostra de entrada

x(0), x(1), x(2),..., x(N-1)

k = índice da saída DFT no domínio da

frequência [0, 1, 2, 3, 4, ..., N-1]

n = índice da entrada das amostras no domínio do tempo [0, 1, 2, 3, 4,..., N-1]

N = número de pontos da amostragem do sinal

N é uma potência de 2

k = N

A)

Pode-se reorganizar a DFT em duas partes, pares e ímpares: n=[0, 1, 2, 3, ...,N-1]

- uma soma sobre os índices de tempo discreto de número pares (n=2m)

- uma soma sobre os índices de tempo discreto de número ímpares (n=m+1)

$$X[k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m].e^{\frac{-i2\pi}{N}.k(2m)} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1].e^{\frac{-i2\pi}{N}.k(2m+1)} \qquad (60)$$

Factorando $e^{-(\frac{i2\pi}{N})k}$ na segunda soma:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m].e^{\frac{-i2\pi}{N/2}.km} + e^{\frac{-i2\pi}{N}.k} . \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1].e^{\frac{-i2\pi}{N/2}.km} \qquad (61)$$

sendo a primeira soma a DFT da

e a segunda soma a DFT da parte dos

parte dos índices pares de x_n índices ímpares de x_n

m = [0, 1, 2, 3, ...,N/2-1]

e o Coeficiente Trigonométrico

(Twiddle factor)

$$\omega_n^k = e^{-(\frac{i2\pi}{n})k} \qquad (62)$$

e pela formula de Euler:

$$e^{-(\frac{i2\pi}{N})} = \cos(\frac{2\pi}{N}) - i.sen(\frac{2\pi}{N}) \qquad (63)$$

B)

Como N é uma potência de dois, *N/2* continua sendo um número par, é possível continuar a reorganizar a DFT, formando das duas somas acima mais duas novas somas por cada uma, e assim sucessivamente, até obter DFT de apenas amostras com N = 2.

Cada desses processos de reorganização é um estágio m, sendo ***m*** o número de estágios de uma amostra N:

$$m = \log_2 N \qquad (63)$$

Exemplo para N = 16, conforme a figura abaixo.

No primeiro estágio o sinal de 16 amostras é decomposto em dois sinais, cada um com oito pontos (as pares e as ímpares). No segundo estágio, a decomposição é de quatro sinais de quatro pontos. E assim sucessivamente, até que a decomposição atinja N sinais compostos com um único ponto:

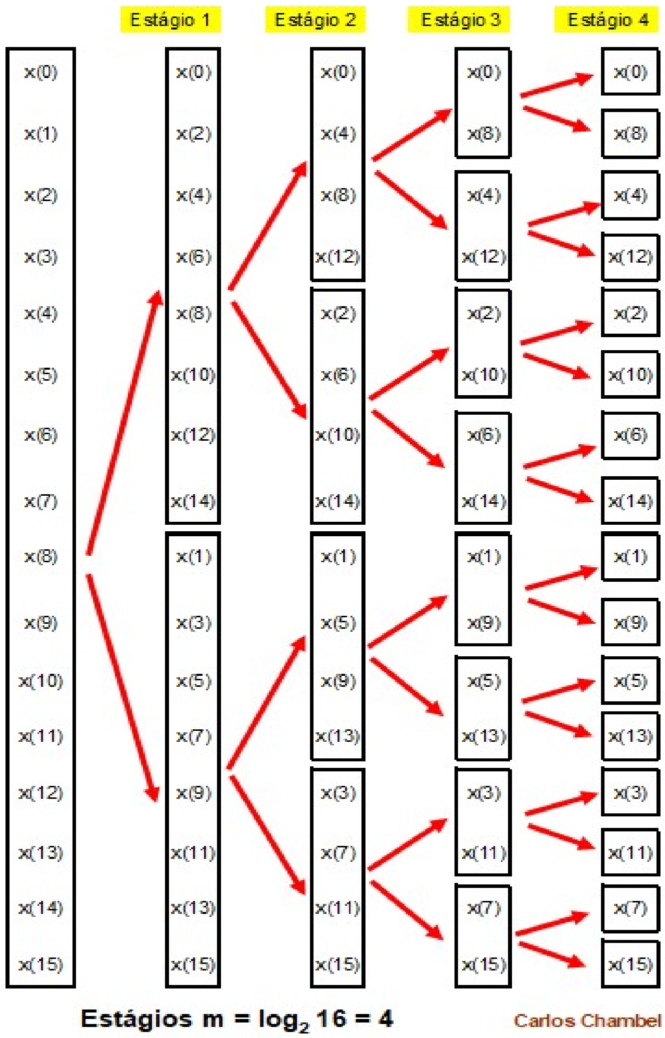


Fig. 14

C)

Para proceder à decomposição das amostras do sinal, de domínio do tempo, conforme referido no ponto anterior, recorre-se à reversão de bits dos índices das amostras, conforme quadro abaixo.

No primeiro quadro o índice da amostra e o seu valor binário, e no segundo quadro, a reorganização do sinal após a reversão dos bits e os seus valores decimais que correspondem à decomposição do sinal e que confere com os valores apresentados na fig. 14:

Amostras			após a reversão de bits	
decimal	binário		decimal	binário
0	0000		0	0000
1	0001		8	1000
2	0010		4	0100
3	0011		12	1100
4	0100		2	0010
5	0101		10	1010
6	0110		6	0110
7	0111		14	1110
8	1000		1	0001
9	1001		9	1001
10	1010		5	0101
11	1011		13	1101
12	1100		3	0011
13	1101		11	1011
14	1110		7	0111
15	1111		15	1111

Fig.15

D)

Para encontrar os espectros de frequência de um sinal em cada ponto N que consta no último estágio, não é preciso efectuar qualquer cálculo, porque cada um desses pontos é igual a um espectro de frequência e igual a si mesmo.

E)

Para determinar os espectros de frequência N, a partir da ordem obtida na decomposição:

- A partir do estágio ***m*** sintetizam-se os N espectros de frequência (um ponto cada) em N/2 espectros de frequência;
- A partir do segundo estágio ***m-1*** sintetizam-se os N/2 espectros de frequência (um ponto cada) em N/4 espectros de frequência;
- E assim sucessivamente, até alcançar um único espectro de frequência de N pontos

através da execução de três loops:

Cada saída X(k) são obtidas pela soma dos outputs das duas DFT N/2, as pares e as ímpares:

```
X(k) = par + impar * twiddlefactor
FOR: Por cada estágio m
    FOR: Por cada caixa desse nivel
        FOR: Por cada amostra de cada
            caixa do nivel.
                Cálculo para o espectro de
                frequência
        ENDFOR
    ENDFOR
ENDFOR
```

F)

Etapas do algoritmo FFT que serviu para estes apontamentos:

1- Criar um conjunto de ondas seno:

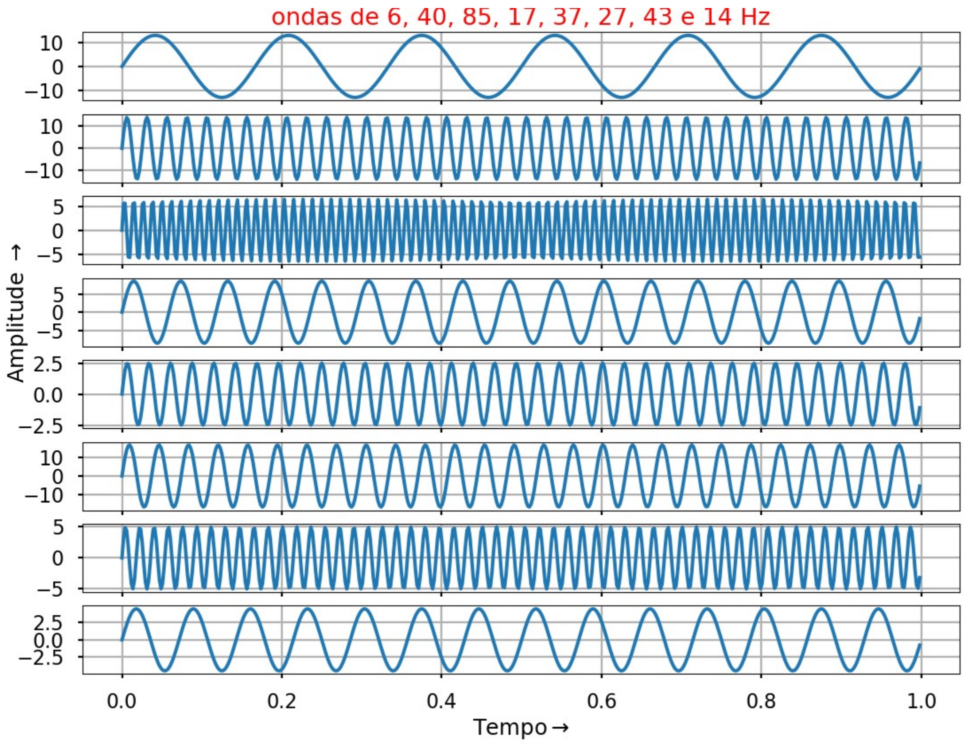


Fig.17 Carlos Chambel/20221206

2- Criar uma onda que resulta da soma das ondas da fig. 17

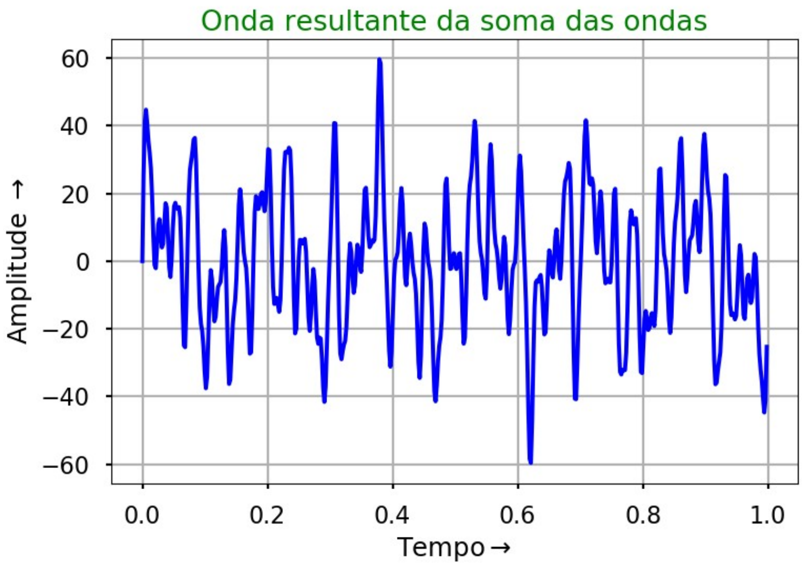


Fig.18 Carlos Chambel/20221206

3- Decomposição do domínio do tempo - reversão de bits:

```
"""
Reversão de bits para N = 0:512; potência de 2
Carlos Chambel 20221217
python v_3.6.13
"""

xbin = []
xrev = []
N = 512
size = 9

def revBits(number, bitSize):

    binary = bin(number).zfill(0)
    reverse = binary[-1:1:-1]
    reverse = reverse + (bitSize - len(reverse)) * '0'
    return reverse

for k in range(0, N):
    xbin.append(0)
    xbin[k] = bin(k)
    xrev.append(0)
    revb = revBits(k, size)
    revnum = int(revb, 2)
    xrev[k] = revb
```

fig. 19

Output do programa acima:

valores decimais e binários antes e depois da reversão:

0 ; 0b0 ; 0 ; 0b000000000 ;
1 ; 0b1 ; 256 ; 0b100000000 ;
2 ; 0b10 ; 128 ; 0b010000000 ;
3 ; 0b11 ; 384 ; 0b110000000 ;
4 ; 0b100 ; 64 ; 0b001000000 ;

5 ; 0b101 ; 320 ; 0b101000000 ;
6 ; 0b110 ; 192 ; 0b011000000 ;
7 ; 0b111 ; 448 ; 0b111000000 ;
8 ; 0b1000 ; 32 ; 0b000100000 ;
9 ; 0b1001 ; 288 ; 0b100100000 ;
10 ; 0b1010 ; 160 ; 0b010100000 ;
. . .
250 ; 0b11111010 ; 190 ; 0b010111110 ;
251 ; 0b11111011 ; 446 ; 0b110111110 ;
252 ; 0b11111100 ; 126 ; 0b001111110 ;
253 ; 0b11111101 ; 382 ; 0b101111110 ;
254 ; 0b11111110 ; 254 ; 0b011111110 ;
255 ; 0b11111111 ; 510 ; 0b111111110 ;
256 ; 0b100000000 ; 1 ; 0b000000001 ;
257 ; 0b100000001 ; 257 ; 0b100000001 ;
258 ; 0b100000010 ; 129 ; 0b010000001 ;
259 ; 0b100000011 ; 385 ; 0b110000001 ;
. . .
507 ; 0b111111011 ; 447 ; 0b110111111 ;
508 ; 0b111111100 ; 127 ; 0b001111111 ;
509 ; 0b111111101 ; 383 ; 0b101111111 ;
510 ; 0b111111110 ; 255 ; 0b011111111 ;
511 ; 0b111111111 ; 511 ; 0b111111111 ;

fig. 20

4- Calcular a FFT:

```
"""
Calculo da FFT de uma onda
Carlos Chambel 20221219
python V_3.6.13
"""
N = int(len(xf)/2)
REX = xf[::2]
IMX = xf[1::2]
M = np.log2(N)

for m in range(1, int(M + 1)):
    me = int(2 ** m)
    me2 = me / 2
    UR = 1
```

```
    UI = 0
    tfr = np.cos(np.pi / me2)
    tfi = -np.sin(np.pi / me2)
    for j in range(1, int(me2 + 1)):
        jm1 = j - 1
        for i in range(jm1, nm1 + 1, me):
            IP = int(i + me2)
            TR = REX[IP] * UR - IMX[IP] * UI
            TI = REX[IP] * UI + IMX[IP] * UR
            REX[IP] = REX[i] - TR
            IMX[IP] = IMX[i] - TI
            REX[i] = REX[i] + TR
            IMX[i] = IMX[i] + TI
        TR = UR
        UR = TR * tfr - UI * tfi
        UI = TR * tfi + UI * tfr
print("fim")
```

fig. 21

Output do programa da FFT com a apresentação de todas as frequências e respectivas amplitudes presentes na onda da fig. 18:

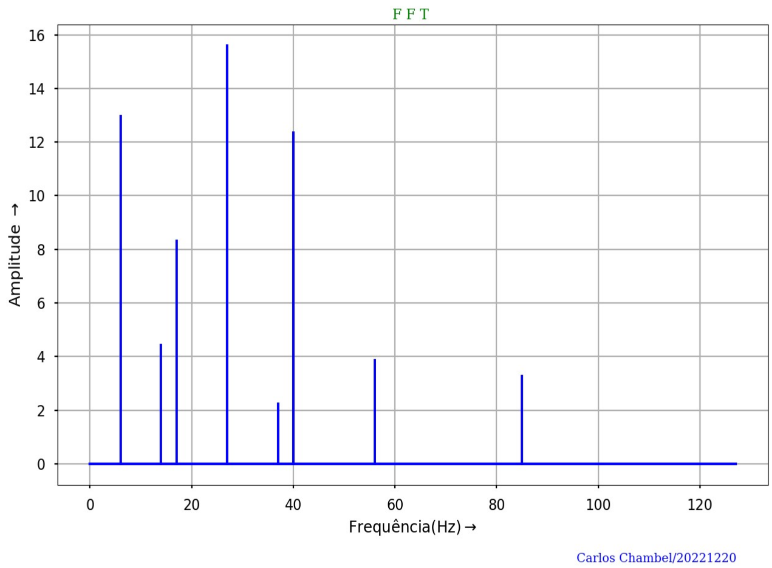


Fig.22

Output do programa da FFT com a apresentação de todas as frequências e respectivas amplitudes presentes na onda da fig. 18, depois de introduzido ruído à mesma, através de:

```
xf += 0.837 * np.random.randn(len(t))
```

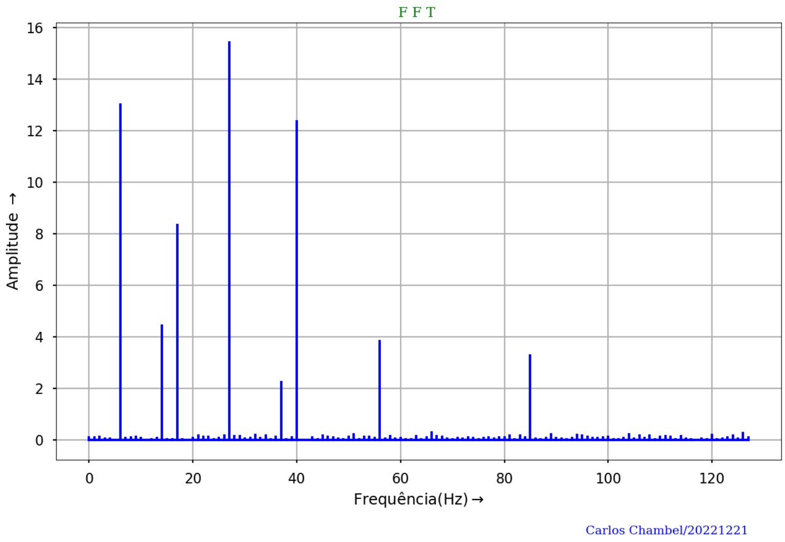


Fig.23

Determinar a inversa desta nova onda, passa por processar as matrizes do output da FFT com o mesmo programa da figura 21 mas com as necessárias alterações de acordo com a equação 53, obtendo assim a onda original da figura 18 (salvo alguns arredondamentos que podem resultar do processo do cálculo).

- * -